Universidad de Granada

Maestría en estadística Aplicada

Materia: Encuestas por Muestreo

Alumno: Francisco Márquez

**Ejercicio tema 2. Elementos de inferencia.**

Sea el diseño muestral *d* con probabilidades:

P((1,2)) = 0,1;

P((2,1)) = 0,2;

P((1,2,3)) = 0,4;

P((1,2,3,4)) = 0,1;

P((3,2,4,1)) = 0,2

y el siguiente estimador lineal del total *T(Y)*

e(1,2) = 4Y1;

e(2,1) = Y1;

e(1,2,3) = Y1 + Y2 + Y3;

e(1,2,3,4) = 4Y2 + 4Y3;

e(3,2,4,1) = Y2 + Y3 + 5Y4

**Construir otro estimador lineal de *T(Y ),* *e\** tal que *E((e\*)2 ) ≤ E(e2)* uniformemente en *Y*. ¿Qué resultado has utilizado?**

En primer lugar, usaremos el Teorema 3.10 (Tema 2) que expresa:

“el estimador *e\*,* versión reducida o simetrizada del estimador *e* del parámetro *θ*, es como mínimo igual de preciso que *e*”.

De esta forma al determinar el estimador en el espacio reducido podemos confiar que se cumple la condición: *E((e\*)2 ) ≤ E(e2*).”

Siguiendo esta estrategia, debemos dar los siguientes 6 pasos:

**PASO 1. Calcular el espacio muestral reducido*(e\*)* de los estimadores dados.**

e(1,2)

**e\*(1,2)**

e(2,1)

e(1,2,3) **e\*(1,2,3)**

e(1,2,3,4)

**e\*(1,2,3,4)**

e(3,2,4,1)

**PASO 2. Realizar un diseño muestral reducido.**

Para obtener la versión reducida del diseño muestral, aplicamos la Definición 3.7 (Tema 1). La cual indica:

“se llama versión simetrizada o reducida de un diseño muestral ordenado

*d\* = (S\*d, P\*d)* al diseño que se obtiene definiendo *Sd = r(S\*d)* y

Pd(s) =∑s∗≈s Pd(s∗) ∀s ∈ Sd ”

Aplicando esta definción obtenemos:

P((1,2)) = 0,1

+ **P(e\*(1,2)) = 0,3**

P((2,1)) = 0,2

P((1,2,3)) = 0,4 **P(e\*(1,2,3)) = 0,4**

P((1,2,3,4)) = 0,1

+ **P(e\*(1,2,3,4)) = 0,3**

P((3,2,4,1)) = 0,2

**PASO 3. Calcular la versión reducida de un estimador.**

Para calcular la versión reducida del estimador, usamos la Definición 2.3 (Tema 2) la cual establece:

“ Se llama versión reducida o simetrizada de un estimador *e(s,* ***y****)* de un parámetro *θ(****y****)* al estimador

e\* = ∑s∗≈s e(s\*, **y**)Pd(s\*)/∑s\*≈s Pd(s\*),

donde la sumatoria se extiende a todas las muestras *s\** del diseño muestral *d* que son equivalentes a *s*. ”

Aplicando esta definción obtenemos:

**e\*(1,2)** = [e (1,2)0,1 + e(2,1)0,2]/0,3 =

[4Y1 0,1 + Y1 0,2]/0,3 =

[0,4Y1 + 0,2Y1]/0,3 =

0,6Y1/0,3 =

**2Y1**

**e\*(1,2,3)** = e (1,2,3)0,4/0,4 =

**Y1 + Y2 + Y3**

**e\*(1,2,3,4)** = [e(1,2,3,4) 0,1 + e(3,2,4,1)0,2]/0,3 =

[(4Y2 + 4Y3)0,1 + (Y2 + Y3 + 5Y4)0,2]/0,3 =

[0,4Y2 + 0,4Y3 + 0,2Y2 + 0,2Y3 +Y4]/0,3 =

[0,6Y2 + 0,6Y3 +Y4]/0,3 =

**2Y2 + 2Y3 + (1/0,3)Y4**

**PASO 4. Calculamos la esperanza de los estimadores.**

Usamos las siguientes definiciones para obtener las respectivas esperanzas de los estimadores:

*E(e) = ∑e Pd y E(e\*) = ∑e\* P\*d*

***E(e)*** =

(4Y1)0,1 + (Y1)0,2 + (Y1 + Y2 + Y3)0,4 + (4Y2 + 4Y3)0,1 + (Y2 + Y3 + 5Y4)0,2 = 0,4Y1 + 0,2Y1 + 0,4Y1 + 0,4Y2 + 0,4Y3 + 0,4Y2 + 0,4Y3 + 0,2Y2 + 0,2Y3 + Y4 =

**Y1 + Y2 + Y3 + Y4**

***E(e\*)*** =

(2Y1)0,3 + (Y1 + Y2 + Y3 )0,4 + (2Y2 +2Y3 + (1/0,3)Y4)0,3 =

0,6Y1 + 0,4Y1 + 0,4Y2 + 0,4Y3 + 0,6Y2 +0,6Y3 + Y4 =

**Y1 + Y2 + Y3 + Y4**

**PASO 5. Calculamos la esperanza de cada los estimadores al cuadrado*.***

E((e)2) = ∑e2 Pd y, E((e\*)2)= ∑ (e\*)2 P\*d

**E((e)2)** =

(4Y1)2 0,1 + (Y1)2 0,2 + (Y1 + Y2 + Y3)2 0,4 + (4Y2 + 4Y3)2 0,1 + (Y2 + Y3 + 5Y4)2 0,2 =

**E((e\*)2)** =

(2Y1)2 0,3 + (Y1 + Y2 + Y3 )2 0,4 + (2Y2 +2Y3 + (1/0,3)Y4)2 0,3 =

**PASO 6. Comprobamos que se cumple la condición requerida.**

*E((e\*)2 ) ≤ E(e2)*

(2Y1)2 0,3 + ~~(Y~~~~1~~ ~~+ Y~~~~2~~ ~~+ Y~~~~3~~ ~~)~~~~2~~ ~~0,4~~ + (2Y2 +2Y3 + (1/0,3)Y4)2 0,3 ≤

(4Y1)2 0,1 + (Y1)2 0,2 + ~~(Y~~~~1~~ ~~+ Y~~~~2~~ ~~+ Y~~~~3~~~~)~~~~2~~ ~~0,4~~ + (4Y2 + 4Y3)2 0,1 + (Y2 + Y3 + 5Y4)2 0,2

=

1.2(Y1)2 + (2Y2 +2Y3 + (1/0,3)Y4)2 0,3 ≤

1.8(Y1)2 + (4Y2 + 4Y3)2 0,1 + (Y2 + Y3 + 5Y4)2 0,2